УДК 330:115

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Д.Т. Мухамедиева, Н.А. Ниёзматова
Центр разработки программных продуктов
и аппаратно-программных комплексов при ТУИТ,
Республика Узбекистан, г. Ташкент

Ключевые слова: *оптимизация, управление, нечеткие множества, функция полезности, ограниченные ресурсы.*

Пусть x – вектор продуктов, R – вектор ресурсов. Мы имеем аддитивную функцию полезности $u(x,\alpha)$ вида

$$u(x,\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j(x_j)\to \max \tag{1}$$

и аддитивные ограничения по ресурсам:

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}g_j(x_j,\beta_j)\le R, \tag{2}$$

$$x\in Q. \tag{3}$$

где j=1,…,n – индекс продукта; $R=(R_1,...,R_m)$ – вектор ресурсов; i = 1,…,m – индекс ресурса; $u_j(x_j)$ – функция полезности производства j–го продукта x_j; $u(x,\alpha)$ – функция полезности общего объема j-х продуктов; $g_j(x_j,\beta_j)$ – векторная строго выпуклая функция потребления ресурсов при производстве j–го продукта x_j; β_j – вектор параметров j–й технологии, $\beta_j\in B_j$ – выпуклые множества; Q – выпуклое множество.

Пусть x^*– решение задачи (1) – (3), а $u(x,\alpha)$ – измеряется как общий объем материальных благ. Рассмотрим вектор p:

$$p_j=\partial u(x^*)/\partial x_j \tag{4}$$

и вектор w:

$$w_j=\partial u(x^*)/\partial R_j. \tag{5}$$

В этом случае вектор p оказывается вектором цен на продукты, а вектор w – вектором цен на ресурсы.

Задача (1) – (3) – это типичная задача параметрического выпуклого нелинейного программирования. Содержательно она интерпретируется как задача оптимального производственного управления. Величины параметров этой задачи зависят от многих факторов реального процесса, не учтенных в приведенной здесь модели.

Если сделать модель более адекватной реальности, внести в нее эти зависимости, то это приведет к значительному ее усложнению и повысит размерность задачи. С другой стороны, модель с фиксированными значениями параметров может оказаться слишком грубой, поскольку часто эти значения выбираются весьма произвольным образом. На самом деле следует, по видимому, учитывать тот факт, что известными бывают не сами значения параметров, а множество их возможных значений. Модель, в которой параметрам приписаны не конкретные числа, а множество возможных значений, более точно соответствует реальности. На этом пути мы от этой задачи приходим к следующему ее уточненному варианту.

Рассмотрим следующий вариант задачи (1) – (3).

$$u(x,\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha}_j \ln(x_j)\to \max, \tag{6}$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n}(\overline{\beta}_{i0j}+\overline{\beta}_{i1j}x_j^2)\subset R \tag{7}$$

$$x\geq 0 \tag{8}$$

Здесь $\overline{\alpha}_{j,}\overline{\beta}_{i0j},\overline{\beta}_{i1j}$ – множество возможных значений ресурсов, так как значения коэффициентов $\alpha_j,\beta_{i0j},\beta_{i1j}$ – описаны в форме нечетких подмножеств, т.е. заданы функции принадлежности соответствующих множеств.

Фактически мы конкретизируем задачу (1) –(3): используем функцию полезности $u(x,\alpha)$ по типу Кобба-Дугласа, g(x) приближаем членами с точностью до второго порядка, а множество допустимых векторов x – множество допустимых объемов производства – берем положительным ортантом.

Если функции принадлежности $\mu_j^k(\alpha_j),\eta_{i0j}^k(\beta_{i0j}),\nu_{i1j}^k(\beta_{i1j})$ заданы, то можно рассматривать

$$\mu_j^k/\sum_{k=1}^{q}\mu_j^k,\ \eta_{i0j}^k/\sum_{k=1}^{q}\eta_{i0j}^k,\ \nu_{i1j}^k/\sum_{k=1}^{q}\nu_{i1j}^k$$

как приведенные субъективные распределения вероятностей значений компонент функции принадлежности μ,η,ν. Тогда $\alpha_j,\beta_{i0j},\beta_{i1j}$ определяются:

$$\alpha_j=\sum_{k=1}^{q}\overline{\alpha}_j^k\mu_j^k/\sum_{r=1}^{q}\mu_j^r,\qquad \beta_{i0j}=\sum_{k=1}^{q}\overline{\beta}_{i0j}^k\eta_{i0j}^k/\sum_{r=1}^{q}\eta_{i0j}^r,$$

$$\beta_{i1j}=\sum_{k=1}^{q}\overline{\beta}_{i1j}^k\nu_{i1j}^k/\sum_{r=1}^{q}\nu_{i1j}^r.$$

Здесь i=1,…,m; j=1,…,n.

В итоге получаем обычную задачу выпуклого нелинейного программирования

$$u(x,\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \ln(x_j)\to \max, \tag{9}$$

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{n}(\beta_{i0j}+\beta_{i1j}x_j^2)\leq R, \tag{10}$$

$$x\geq 0\,. \tag{11}$$

Пусть m=1. Тогда нечеткое аналитическое решение задачи (9)–(11) имеет функции принадлежности

$$\varphi(x_j)=\exp(-\frac{k_j}{2}(x_j-x_j^*)^2), \tag{12}$$

$$\varphi(p_j)=\exp(-\frac{k_j}{2}(p_j-p_j^*)^2), \tag{13}$$

$$\varphi(w)=\exp(-\frac{k_j}{2}(w-w^*)^2), \tag{14}$$

Здесь:

$$x_j^*=[\alpha_j\alpha_0^{-1}(R-\beta_0)/\beta_{10j}]^{1/2}, \tag{15}$$

$$p_j^*=[\alpha_j\alpha_0\beta_{10j}/(R-\beta_0)]^{1/2}, \tag{16}$$

$$w^*=\alpha_0/(2(R-\beta_0)) \tag{17}$$

где

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \qquad \beta_0=\sum_{j=1}^{n}\beta_{10j}.$$

Таким образом при m=1. Тогда нечеткому решению соответствует нечеткое максимальное значение $\mu_O(x)$ функции $u(x,\alpha)$:

$$\mu_O(x)=\exp(-\Phi(x)),$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}k_j[\max(0,x_j-x_j^*)]^2.$$

Обозначим через O_i множество решений удовлетворяющих ограничивающие условия задачи (6)–(8). В силу того что коэффициенты заданы нечетко, O_i является нечетким множеством. Пусть его функция принадлежности $\mu_O(x)$. Таким образом

$$O_i=\{x,\mu_O(x),x\in X\}.$$

Отображение u, задаваемое (6) описывается выражением

$$\mu_u(x,y)=\begin{cases}1, y=u(x,\alpha),\\ 0, y\neq u(x,\alpha).\end{cases} \tag{18}$$

В связи с тем, что x_j – элемент нечеткого множества A_j в X, y_j будет принадлежат некоторому нечеткому множеству B_j в Y при отображении u. Согласно [1] функция принадлежности множества A_j и его образа B_j связаны соотношением

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in X}\min\{\mu_A(x),\mu_u(x,y)\}. \tag{19}$$

Подставив (18) в (19) $\mu_u(x,y)$, получим

$$\mu_B(y)=\sup_{x\in X}\{\mu_A(x):y=u(x,\alpha)\}. \tag{20}$$

Для функции $y=u(x,\alpha)$ множество O_i является прообразом $B_{j.}$ Отсюда, согласно [1], имеем

$$\mu_O(x)=\mu_B(u(x,\alpha)). \tag{21}$$

Подставив (20) в (21), получим

$$\mu_{Oi}=\sup_{x\in X}\{\mu_A(x):y=u(x,\alpha)\}. \tag{22}$$

Решением (22) для $\mu_A(x)$ является

$$\mu_{Oi}(x)=\exp(-\frac{k_i}{2}[\max(0,x_j-x_j^*)]^2). \tag{23}$$

Пусть $x=(x_1,...,x_n)$. Тогда допустимое решение является пересечением нечетких множеств $O_i, i=1,...,n$;

$$O=O_1 \bigcap O_2 \bigcap ... \bigcap O_n. \qquad (24)$$

Если исследователь предпочитает выбрать в качестве решения конкретную альтернативу $x \in X$, то его выбор должен опираться не только на степень принадлежности этой альтернативы нечеткому множеству $\varphi(x)$, но и на соответствующее значение функции $u(x,\alpha)$. Как следует из предложения, чем больше значение r_O, тем меньше степень принадлежности $\varphi(x)$ той альтернативы, которая дает значение $u(x,\alpha)=r_O$. Поэтому исследователь должен сначала обратиться к нечеткому максимальному значению $\mu_O(r)$ функции $u(x,\alpha)$ и выбрать пару $(r_O, \mu_O(r_O))$, которая согласуется с его желанием получить по возможности большую степень принадлежности выбранного r_O множеству $\mu_O(r)$. После этого имеет смысл выбрать такую альтернативу $x_O \in u^{-1}(r_O,\alpha)$, которая имеет наибольшую степень принадлежности множеству φ(x).

Литература

1. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации // М.: Наука, 1981.

2. Гермейер Ю.В. Введение в теорию исследования операций // М.: Наука, 1971.